| **Нормы векторов и матриц**  *1) Векторные нормы*  В дальнейшем как параметры, так и решения рассматриваемых задач будут векторами пространства R^𝑛 . Для исследования обусловленности задач нужно измерять «величины» этих векторов, для чего используются *векторные нормы*. Мы будем активно пользоваться двумя векторными нормами: *максимум-нормой:*    и *евклидовой нормой:*    Обе эти нормы являются частными случаями *𝑝-нормы*, определяемой формулой:    2) *Матричные нормы*  *Рассмотрим задачу решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида 𝐴𝑥 = 𝑏* | **Плохо обусловленные системы**  **Определение.** Задача называется *корректно поставленной* или просто *корректной*, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Если нарушено хотя бы одно из этих условий, задачу называют *некорректной*.  *Пример (вычисление значения многочлена)*. Исследовать обусловленность задачи вычисления значения многочлена относительно погрешности, вносимой в один из его коэффициентов.  *Решение.* Пусть . Рассмотрим задачу вычисления значения данного многочлена, считая фиксированными 𝑥 и все коэффициенты 𝑎𝑖 кроме какого-то одного — 𝑎𝑘, который и будем считать параметром. Пусть вместо точного значения 𝑎𝑘 используется «возмущенное» значение 𝑎˜𝑘, т. е. имеем относительную погрешность в начальных данных, равную    Вычислим относительную погрешность решения и выразим ее через относительную погрешность начальных данных: | **Метод Гаусса**    будем записывать в матричном виде 𝐴𝑥 = 𝑏, 𝐴 =(︀𝑎𝑖𝑗)︀— квадратная матрица размерности 𝑛; 𝑥 = (𝑥1, . . . , 𝑥𝑛), 𝑇 —искомый вектор решения; 𝑏 = (𝑏1, . . . , 𝑏𝑛), 𝑇 — вектор правой части. Везде в дальнейшем будем предполагать, что задача корректно поставлена, т. е.det 𝐴 ̸= 0.  Метод Гаусса прямой( позволяют найти точное решение системы за конечное число операций). Все прямые методы решения СЛАУ базируются на простой идее: исходную систему преобразуют к эквивалентной системе (т. е. к системе с тем же решением): 𝑉 𝑥 = 𝑔, решение которой находится легк. исходную систему приводят к системе с треугольной матрицей. Так, в случае верхнетреугольной матрицы 𝑉 система имеет вид  Решается такая система путем последовательного выражения через уже известные значения, начиная с | **LU-разложение**  Пусть главные угловые миноры матрицы 𝐴 отличны от нуля. Тогда осуществим прямой ход метода Гаусса, представляемый в виде . Матрица 𝑈 уже получена. Каждая  из нижнетреугольных матриц 𝐿𝑘 в (2.12) представляет собой единичную матрицу, к которой применены те же самые элементарные преобразования, которые применялись к матрице 𝐴 при обнулении элементов под главной диагональю в 𝑘-м столбце. Из последнего тождества имеем: где 𝑘-й столбец матрицы 𝐿 в точности равен 𝑘-му столбцу матрицы  Алгоритм построения 𝐿𝑈 разложения без выбора главного элемента  for 𝑘 = 1, 𝑛 − 1 do  for 𝑖 = 𝑘 + 1, 𝑛 do  𝑎𝑖𝑘 /= 𝑎𝑘𝑘  𝑎𝑖,(𝑘+1):𝑛 −= 𝑎𝑖𝑘 𝑎𝑘,(𝑘+1):𝑛  end for  end for  Здесь обозначение 𝑗1 : 𝑗2 обозначает диапазон элементов с индексами от 𝑗1 до 𝑗2. В частности, 𝑎𝑖,(𝑘+1):𝑛 — это элементы 𝑖-й строки матрицы 𝐴, находящиеся в столбцах с (𝑘 + 1)-го по 𝑛-й. В результате выполнения алгоритма верхний треугольник матрицы 𝐴, включая диагональ, будет содержать элементы матрицы 𝑈, а нижний треугольник — внедиагональные элементы матрицы 𝐿. |
| --- | --- | --- | --- |
| При работе с матрицами (по крайней мере в контексте линейной алгебры) всегда важно помнить, что любая матрица определяет линейный оператор, т. е. отображение 𝐴 : R^𝑚 → R 𝑛 , которое обладает свойством линейности    **Определение.** Нормой линейного оператора (матрицы) 𝐴 называют число    Норма оператора полностью определяется векторной нормой, т. е. каждая векторная норма порождает (*индуцирует*) соответствующую ей операторную матричную форму (в этом случае говорят также, что матричная норма *подчинена* векторной).  - Векторной максимум-нормой  индуцируется матричная  норма, вычисляемая по правилу:  (максимум-норма,кубическая матричная норма)  - Евклидовой векторной нормой  индуцируется матричная норма, вычисляемая по правилу:  (спектральная) | Коэффициент  называется *числом обусловленности*.  Проблемы при решении рассматриваемой задачи могут возникать, когда это число велико: например, когда 𝑥 близко к одному из корней многочлена 𝑃, или 𝑥 ≫ 1 и 𝑘 достаточно велико.  *Таким образом, число обусловленности задачи показывает, во сколько раз относительная погрешность возмущенного решения может превосходить относительную погрешность соответствующих начальных данных.*  Задача называется *плохо обусловленной*, если ее число обусловленности велико.  *Замечание 1.1.* Естественно, понятие «большое число обусловленности» относительно. Судить о величине обусловленности можно лишь в контексте той машинной арифметики, которая используется для вычислений, а еще точнее — от величины машинного эпсилон, так как эта величина ограничивает относительную погрешность округления. | Вычислительный процесс (2.3) называется обратной подстановкой.  Обозначим 𝑎𝑖 𝑖-ю строчку матрицы 𝐴. Тогда прямой ход метода Гаусса, заключающийся в приведении матрицы системы к верхнетреугольному виду с помощью элементарных преобразований, можно записать в виде следующего алгоритма.  for 𝑘 = 1, 𝑛 − 1 do  for 𝑖 = 𝑘 + 1, 𝑛 do  𝑙 ← 𝑎𝑖𝑘/𝑎𝑘𝑘  𝑎𝑖 ← 𝑎𝑖 − 𝑙 𝑎𝑘  𝑏𝑖 ← 𝑏𝑖 − 𝑙 𝑏𝑘  end for  end for  **Теорема 2.1**. Базовый алгоритм метода Гаусса осуществим тогда и только тогда, когда все главные угловые миноры матрицы 𝐴 не равны нулю: |[𝐴]𝑘| ̸= 0 ∀𝑘 = 1, 𝑛.  Трудоемкость метода Гаусса. Прямой ход базового алгоритма метода Гаусса требует выполнения операций | *Рассмотрим теперь прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.* В этом случае вместо будем иметь: . где 𝑃𝑘 — матрица перестановки, которая применяется к матрице 𝐴(𝑘) перед выполнением 𝑘-го шага.  Теорема 2.4 (𝐿𝑈-разложение с выбором главного элемента). Пусть det 𝐴 ̸= 0. Тогда матрица 𝐴 представима в виде 𝑃 𝐴 = 𝐿*U. где 𝑃 — матрица перестановки, 𝐿 — нижнетреугольная матрица с единичной главной диагональю, 𝑈 — верхнетреугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали.*  *Для построения алгоритма вычисления 𝐿𝑈-разложения с выбором главного элемента, т. е. разложения достаточно внести лишь небольшие изменения в базовый алгоритм. Главное наблюдение, необходимое для этого, уже было сделано выше: матрицы , по которым строится матрица 𝐿, представляют собой матрицу 𝐿𝑘, к 𝑘-му столбцу которой (и только к нему!) последовательно применены перестановки 𝑃𝑘+1, 𝑃𝑘+2, . . . , 𝑃𝑛−1. Учитывая, что элементы матрицы*  *𝐿 хранятся на месте обнуляемых элементов исходной матрицы 𝐴, указанные преобразования 𝑃𝑞 будут применяться к 𝐿𝑘 автоматически при перестановке строк матрицы 𝐴.* |

rfffff